

# TD 29-30 : Applications linéaires Indications

Dans ce TD, on note  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -e.v.

## Applications linéaires

**1** ★★ Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

- 1)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y) = (x + y, x - 2y, 0)$
- 2)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (2x + y, y + 1)$
- 3)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (xy, yx)$
- 4)  $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  définie par  $f(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 5)  $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + d$
- 6)  $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  définie par  $\varphi(f) = f'' - 4f$
- 7)  $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  définie par  $\varphi(f) = 2ff'$
- 8)  $f : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  définie par  $f(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(X)$

Dans la suite, on considère  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{C}^2$  comme des  $\mathbb{C}$ -e.v. :

- 9)  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z_1, z_2) = z_1 - z_2$
- 10)  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z_1, z_2) = z_1 - \bar{z}_2$

**2** ★★ Soit

$$(e_1, e_2, e_3) = ((1, 4, 1), (-2, 3, 3), (0, 2, 1))$$

- 1) Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Montrer que  $(x, y, z) \in \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$  sans utiliser d'argument de dimension.
- 2) En déduire que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- 3) Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une application linéaire qui vérifie :

$$f(e_1) = (6, 4, -4)$$

$$f(e_2) = (4, 4, -8)$$

$$f(e_3) = (3, 1, -3)$$

Justifier l'existence et l'unicité de l'application  $f$ .  
(nécessite un résultat de la section 2 du cours)

- 4) Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . En utilisant la question 1), déterminer  $f(x, y, z)$ .

1) Il s'agit de montrer que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une famille génératrice, mais sans montrer qu'elle est libre et utiliser le TTC.

## Noyau et image

**3** ★ On considère l'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par :

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 3x - 5y + z)$$

- 1) Déterminer  $\text{Ker } f$ , ainsi qu'une base et sa dimension.
- 2) Faire de même pour  $\text{Im } f$ .
- 3)  $f$  est-elle injective ? surjective ? bijective ?

**4** ★ On considère l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par :

$$f(x, y) = (x, x + y, x + 2y)$$

- 1) Déterminer  $\text{Ker } f$ , ainsi qu'une base et sa dimension.
- 2) Faire de même pour  $\text{Im } f$ .
- 3)  $f$  est-elle injective ? surjective ? bijective ?

**5** ★★ Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

- 1) Montrer que :

$$g \circ f = 0 \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g$$

- 2) Montrer que :

$$\text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f) \quad \text{et} \quad \text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$$

- 3) En déduire que si  $g \circ f$  est un isomorphisme, alors  $f$  est injective et  $g$  est surjective.

**6** ★★★ On considère l'application  $f : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  définie par  $f(P) = P(X + 1) - P(X)$ .

- 1) Soit  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une famille de polynômes tels que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\deg P_k = k$ . Montrer que la famille  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  engendre  $\mathbb{K}[X]$ .
- 2) Déterminer  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$ , en utilisant la question précédente pour  $\text{Im } f$ .
- 3) Déduire des questions précédentes que  $f$  est un endomorphisme surjectif mais pas injectif. En quoi ce n'est pas une contradiction ?

2 Utiliser le fait que  $\text{Im } f = \text{Vect}(f(X^k))_{k \in \mathbb{N}}$ .

7 ★★ On définit  $\varphi : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  par

$$\varphi(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Montrer que  $\varphi$  est linéaire et déterminer  $\text{Ker } \varphi$  et  $\text{Im } \varphi$ . Est-ce que  $\varphi$  est injective ? surjective ?

Il faut dans les deux cas utiliser des caractérisations pour reformuler ce qu'on doit montrer. Pour  $\text{Im } \varphi$ , vous pouvez montrer que  $\varphi$  est surjective en construisant la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  explicitement.

8 ★★ Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer les assertions suivantes :

$$\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2 \quad \text{et} \quad \text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$$

$$\text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \iff \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$$

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f + \text{Im } f = E$$

### Dimension finie et rang

9 ★ On suppose que  $\dim E > \dim F$ . Soit  $f : E \rightarrow F$ . Montrer que  $f$  n'est pas injective.

Utiliser le rang.

10 ★★ Soit  $f : E \rightarrow E$  tel que  $f \circ f$  est l'application nulle.

- 1) Montrer que  $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ .
- 2) En déduire que  $\text{rg } f \leq \frac{1}{2} \dim E$ .

11 ★★ Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$  définie par

$$f(P) = P - P' - P''$$

- 1) Montrer que  $f$  est bijective.
- 2) Dans cette question on suppose  $n \geq 2$ . Calculer  $f(1)$ ,  $f(X)$  et  $f(X^2)$ . En déduire les polynômes  $Q_0, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_n[X]$  tels que  $f(Q_0) = 1$ ,  $f(Q_1) = X$  et  $f(Q_2) = X^2$ .

12 ★★ On pose  $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$  et  $f_1, f_2, f_3, f_4 \in E$  les fonctions définies par :

$$f_1(t) = \sin t \quad f_2(t) = \cos t \quad f_3(t) = t \sin t \quad f_4(t) = t \cos t$$

Enfin on définit  $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$ .

- 1) Montrer que  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$  est une base de  $F$ . En déduire la dimension de  $F$ .
- 2) On considère l'application  $D : F \rightarrow F$  définie par  $D(f) = f'$ . Montrer que  $D$  est bien définie et que c'est un endomorphisme de  $F$ .
- 3) Déterminer  $\text{Ker } D$ .
- 4) En déduire que  $D$  est bijective.

1) Comme on ne connaît pas la dimension de  $F$ , on est obligé de montrer que la famille  $\mathcal{B}$  est libre et génératrice.

13 ★★ Soit  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  de degrés respectifs  $n, m \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $P \wedge Q = 1$ . On veut montrer qu'il existe un unique couple  $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$  vérifiant :

$$PU + QV = 1 \quad \deg U \leq m - 1 \quad \deg V \leq n - 1$$

- 1) Justifier brièvement l'existence du couple  $(U, V)$  sans les contraintes sur les degrés de  $U$  et de  $V$ . Dans la suite, on définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_{m-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X] &\rightarrow \mathbb{R}_{m+n-1}[X] \\ (U, V) &\mapsto PU + QV \end{aligned}$$

- 2) Justifier que  $\varphi$  est bien définie et linéaire.
- 3) Montrer que  $\varphi$  est injective.
- 4) En déduire que  $\varphi$  est bijective. Conclure.

14 ★★★ Soit  $E$  un e.v. de dimension finie et  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ .

- 1) Montrer que  $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v$ . En déduire que  $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v$
- 2) Trouver  $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  tels que l'inégalité ci-dessus soit stricte.
- 3) Trouver  $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  tels que l'inégalité ci-dessus soit une égalité.

**15** ★★★ On suppose  $E$  de dimension finie et  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que :

$$\text{Ker } u \subset \text{Ker } v \iff \exists w \in \mathcal{L}(E) \quad v = w \circ u$$

Le sens réciproque est évident. Pour le sens direct, il faut construire l'application  $w$ . Pour cela, il suffit de connaître  $w$  sur deux s.e.v. de  $E$  supplémentaires. On prend donc naturellement  $\text{Im } u$  et un supplémentaire quelconque  $S$  de  $\text{Im } u$ . On peut imposer la valeur que l'on souhaite à  $w$  sur  $S$ . Ensuite, si  $y \in \text{Im } u$ , que doit valoir  $w(y)$  ? Cette application est-elle bien définie et linéaire ?

### Projecteurs, symétries, etc.

**16** ★ Déterminer si les applications linéaires suivantes sont des projecteurs ou des symétries, et déterminer leurs éléments caractéristiques :

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (x, -2x - y)$
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x + y - z, x + y - z)$$

- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x - z, 2y, -x + z)$$

- $f_B : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  définie par  $f(A) = R$ , où  $R$  est le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B \in \mathbb{R}[X]$  non nul fixé.
- $f_B : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  définie par  $f(A) = BQ - R$ , où  $Q$  et  $R$  sont le quotient et le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B \in \mathbb{R}[X]$  non nul fixé.

**17** ★ Déterminer l'expression :

- Du projecteur  $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  sur  $F = \text{Vect}((0, 1))$  parallèlement à  $G = \text{Vect}((1, 1))$ .
- De la symétrie  $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  par rapport à  $F$  et parallèlement à  $G$  (définis ci-dessus).
- De la symétrie  $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  par rapport à  $F = \text{Vect}((1, 2, 3))$  et parallèlement à  $G = \text{Vect}((1, 0, 0), (1, 1, 0))$ .
- Du projecteur  $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  sur  $G$  et parallèlement à  $F$  (définis ci-dessus).

**18** ★★ Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  et  $q = \text{id}_E - p$ .

- Montrer que  $p$  est un projecteur si et seulement si  $q$  est un projecteur.
- On suppose que  $p$  est un projecteur. Montrer que  $\text{Im } p = \text{Ker } q$  et que  $\text{Ker } p = \text{Im } q$ .

**19** ★★ Soit  $p, q$  deux projecteurs de  $E$ . Montrer que

$$\text{Ker } p = \text{Ker } q \iff (p \circ q = p \quad \text{et} \quad q \circ p = q)$$

$$\text{Im } p = \text{Im } q \iff (p \circ q = q \quad \text{et} \quad q \circ p = p)$$

### Formes linéaires

**20** ★★ On pose  $E := \mathbb{R}^2$  et  $f, g \in E^*$  les applications

$$f(x, y) = x + y \quad g(x, y) = x - y$$

- Montrer que  $(f, g)$  forme une base de  $E^*$ .
- Déterminer les coordonnées de  $p : (x, y) \mapsto x$  et de  $q : (x, y) \mapsto y$  selon la base  $(f, g)$ .
- Trouver une base  $(u, v)$  de  $E$  telle que  $(f, g)$  soit la base duale de  $(u, v)$ .

**21** ★★ Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. et  $f \in E^*$ . Montrer que  $f$  est surjective ou identiquement nulle.

**22** ★★ On considère l'ensemble  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  on pose  $\varphi_k : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi_k(P) = P(k)$ .

- Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a  $\varphi_k \in E^*$ .
- Montrer que  $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$  est une base de  $E^*$ .
- En déduire qu'il existe  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  :

$$\int_0^n P(t) dt = \lambda_0 P(0) + \lambda_1 P(1) + \dots + \lambda_n P(n)$$

*Remarque :* on peut montrer le même résultat si on remplace l'intégrale ci-dessus par  $\int_a^b P(t) dt$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$  quelconques. Cependant, les réels  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  dépendront de  $a, b$ .

3 Que peut-on dire de l'application  $P \mapsto \int_0^n P(t) dt$  ?  
Puis utiliser la question précédente.